

Integrationsmöglichkeiten

der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

mit n Variabeln

von

Oberlehrer **Dr. Ernst Schultz.**

Beilage zum Programm

des Schiller-Realgymnasiums zu Stettin

Ostern 1901.

Gedruckt bei Hermann Saran in Stettin.

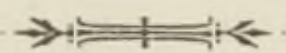
22042



Integrationsmöglichkeiten

der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

mit n Variabeln.



Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung hat die allgemeine Form:

$$\tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} A_{\varkappa\lambda} \frac{\partial W}{\partial u_\varkappa} \frac{\partial W}{\partial u_\lambda} - \Omega - h = 0 \qquad (1)$$

wo die $A_{\varkappa\lambda}$ die Eigenschaft haben, dass $A_{\varkappa\lambda} = A_{\lambda\varkappa}$ ist, und die Grössen A und Ω Functionen der Variablen u_i $(i = 1, 2, .. n)$ sind. Die Grösse h ist eine Constante. In einer früheren Arbeit*) hatte ich die Integrationsmöglichkeit der betreffenden Differentialgleichung mit drei Variablen untersucht, wobei noch die Bedingung gestellt wurde, dass eine Variable nicht explicite in der Gleichung enthalten sein sollte. In dieser Arbeit sollen die Integrationsmöglichkeiten für n Variable untersucht werden, was Herr Prof. Stäckel schon in seiner Habilitationsschrift**) ausgeführt hat, wovon ich erst nach dem Erscheinen meiner früheren Arbeit durch Übersendung der Schrift von dem Herrn Verfasser Kenntnis erhielt. In meinen Untersuchungen gehe ich von der Jacobischen Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung aus und gelange zu denselben Ausdrücken für die Coefficienten A. Während jedoch Herr Stäckel die fernere Bedingung stellt, dass die Ausdrücke für die Grössen A von den willkürlichen Constanten unabhängig sein müssen, zeige ich, dass diese Bedingung gerade so wie die Bedingung $A_{\varkappa\lambda} = A_{\lambda\varkappa}$ von selbst erfüllt wird. Es ist hervorzuheben, dass die Functionen $p_i = \omega_i (u_1, u_2 .. u_n, \alpha_1 .. \alpha_n)$ $(i = 1, 2, .. n)$, wenn $p_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}$ ist, nicht völlig beliebige Functionen sein können, sondern entsprechend der Jacobischen Methode müssen sich aus ihnen Functionen $H_i (u_1 .. u_n, p_1 .. p_n) = \alpha_i$ $(i = 1, 2, .. n)$ ableiten lassen, welche die Jacobische Bedingung $(H_i H_k) = 0$ $(i, k = 1, 2 .. n)$ identisch erfüllen. Ich zeige ferner, dass die Kräftefunction Ω in der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung bei Anwendung der für die A geltenden Ausdrücke frei von den willkürlichen α sein muss, während Herr Stäckel diese Eigenschaft der Function Ω zum Ausgangspunkt seiner Formeln macht.

Die specielle Bedingung, dass die Integration durch Trennung der Variablen möglich sein soll, liefert nur insofern eine Vereinfachung, dass die aus den n Functionen $p_i = \omega_i (u_i, \alpha_1, \alpha_2 .. \alpha_n)$ $(i = 1, 2 .. n)$ sich ergebenden Functionen $H_i (u_1 .. u_n, p_1 .. p_n) = \alpha_i$ $(i = 1, 2 .. n)$ von selbst die Bedingung $(H_i H_k) = 0$ $(i, k = 1, 2 .. n)$ erfüllen.

Bevor ich die allgemeine Jacobische Methode anwende, will ich zunächst die Formen der partiellen Differentialgleichung aufsuchen, welche sich bei Trennung der Variablen aus der Anwendung der Cauchyschen Methode ergeben.

1.

Setzen wir $2\Omega = \Omega'$ und lassen wir die Striche fort, setzen wir ferner $\alpha_1 = 2h$, so geht die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung über in:

$$f = \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} A_{\varkappa\lambda} \frac{\partial W}{\partial u_\varkappa} \frac{\partial W}{\partial u_\lambda} - \Omega - \alpha_1 = 0 \qquad (2)$$

---

*) Integrationsmöglichkeiten der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung mit drei Variablen. Beilage zum Programm des Schiller-Realgymnasiums zu Stettin. Ostern 1898.

**) Über die Integration der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung mittelst Separation der Variabeln. Habilitationsschrift von Dr. Paul Stäckel. Halle a. S. 1891.

Das hierzu gehörende System totaler Differentialgleichungen ist

$$\frac{du_1}{2\sum\limits_{\varkappa} A_{1\varkappa}\, p_\varkappa} = \ldots \frac{du_i}{2\sum\limits_{\varkappa} A_{i\varkappa}\, p_\varkappa} = \ldots \frac{du_n}{2\sum\limits_{\varkappa} A_{n\varkappa}\, p_\varkappa} = -\frac{dp_1}{\sum\limits_{\varkappa\lambda} \frac{\partial A_{\varkappa\lambda}}{\partial u_1} p_\varkappa\, p_\lambda - \frac{\partial \Omega}{\partial u_1}} =$$

$$\ldots - \frac{dp_i}{\sum\limits_{\varkappa\lambda} \frac{\partial A_{\varkappa\lambda}}{\partial u_i} p_\varkappa\, p_\lambda - \frac{\partial \Omega}{\partial u_i}} = \ldots - \frac{dp_n}{\sum\limits_{\varkappa\lambda} \frac{\partial A_{\varkappa\lambda}}{\partial u_n} p_\varkappa\, p_\lambda - \frac{\partial \Omega}{\partial u_n}}$$

wenn $p_\varkappa = \frac{\partial W}{\partial u_\varkappa}$ ist.

Soll die Integration durch Variablentrennung möglich sein ohne Elimination einer der Grössen p aus (2), so muss die totale Differentialgleichung

$$\frac{du_n}{2\sum\limits_{\varkappa} A_{n\varkappa}\, p_\varkappa} = -\frac{dp_n}{\sum\limits_{\varkappa\lambda} \frac{\partial A_{\varkappa\lambda}}{\partial u_n} p_\varkappa\, p_\lambda - \frac{\partial \Omega}{\partial u_n}}$$

integrierbar werden. Damit dieses möglich werde, muss sein

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_n} = C_n(u_1, \ldots u_{n-1})\, \frac{\partial \Omega_n(u_n)}{\partial u_n}, \text{ sodass } \Omega = \Omega'(u_1 \ldots u_{n-1}) + C'_n(u_1 \ldots u_{n-1})\, \Omega_n(u_n) \text{ ist.}$$

Ferner muss sein $A_{n\varkappa} = 0$ für $\varkappa = 1, 2 \ldots n-1$; $A_{n,n} = C'_n(u_1\, u_2 \ldots u_{n-1})\, f_n(u_n)$.

Alsdann geht die totale Differentialgleichung über in:

$$\frac{du_n}{2\, C'_n(u_1 \ldots u_{n-1})\, f_n(u_n)} = \frac{-dp_n}{C'_n(u_1 \ldots u_{n-1}) \left\{ \sum\limits_{\varkappa\lambda} \frac{\partial f_n}{\partial u_n} p_\varkappa\, p_\lambda - \frac{\partial \Omega_n(u_n)}{\partial u_n} \right\}}$$

Nach Multiplication beider Seiten mit $C'_n(u_1 \ldots u_{n-1})$ ergiebt sich:

$$\frac{du_n}{2 f_n(u_n)\, p_n} = \frac{-dp_n}{\frac{\partial f_n(u_n)}{\partial u_n} p^2_n - \frac{\partial \Omega'}{\partial u_n}}$$

Also ergiebt sich: $\frac{\partial \Omega'(u_n)}{\partial u_n} du_n = d\,[f_n(u_n)\, p^2_n]$.

Mithin erhalten wir durch Integration:

$$p_n = \sqrt{\frac{\Omega_n(u_n) + c_n}{f_n(u_n)}} \quad (3), \text{ wo } c_n \text{ eine willkürliche Constante ist.}$$

Um die Gleichung:

$$\frac{du_{n-1}}{2\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} A_{n-1,\varkappa}\, p_\varkappa} = \frac{-dp_{n-1}}{\sum\limits_{\varkappa,\lambda=1}^{n} \frac{\partial A_{\varkappa,\lambda}}{\partial u_{n-1}} p_\varkappa\, p_\lambda - \frac{\partial \Omega'(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial u_{n-1}} - \Omega_n(u_n)\, \frac{\partial C'_n(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial u_{n-1}}}$$

integrierbar zu machen, muss zunächst sein:

$$A_{n-1,\varkappa} = 0; \text{ für } \varkappa = 1, 2 \ldots n-2, n.$$

Alsdann geht die Differentialgleichung, wenn wir noch den in (3) für p_n gefundenen Wert einsetzen, über in:

$$\frac{du_{n-1}}{2A_{n-1,n-1}\, p_{n-1}} = \frac{-dp_{n-1}}{\sum\limits_{a,\lambda=1}^{n} \frac{\partial A_{\varkappa,\lambda}}{\partial u_{n-1}} p_\varkappa\, p_\lambda + \frac{\partial A_{n-1,n-1}}{\partial u_{n-1}} p^2_{n-1} + \frac{\partial C'_n(u_1, u_2 \ldots u_{n-1})}{\partial u_{n-1}} f_n(u_n) + \frac{\Omega_n(u_n) + c_n}{f_n(u_n)} - \frac{\partial \Omega'(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial u_{n-1}} - \Omega_n(u_n)\, \frac{\partial C_n(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial u_{n-1}}}$$

Damit die $p_\varkappa\, p_\lambda$ für $\varkappa, \lambda = 1, \ldots n-2$ fortfallen, muss sein

$$\frac{\partial A_{\varkappa,\lambda}}{\partial u_{n-1}} = 0 \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n-2).$$

Hiermit reduciert sich die Differentialgleichung auf:

$$\frac{du_{n-1}}{2\,A_{n-1,\,n-1}\,p_{n-1}} = \frac{-\,dp_{n-1}}{\frac{\partial A_{n-1,\,n-1}}{\partial u_{n-1}}\,p^2_{n-1} + c_n\,\frac{\partial C'_n\,(u_1, u_2 \,.\,.\, u_{n-1})}{\partial u_{n-1}} - \frac{\partial \Omega'(u_1 \,.\,.\, u_{n-1})}{\partial u_{n-1}}}$$

Damit in dem Nenner der rechten Seite kein u_n vorkomme, muss sein

$$A_{n-1,\,n-1} = C'_{n-1}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-2})\,f_{n-1}\,(u_{n-1})$$

$$C'_n\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-1}) = C'_{n-1}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-2})\,C_{n-1}\,(u_{n-1})$$

Alsdann geht die Differentialgleichung über in nach Multiplication beider Seiten mit $C'_{n-1}\,(u_1 \,.\,.\, n-2)$

$$\frac{du_{n-1}}{2\,f_{n-1}\,(u_{n-1})\,p_{n-1}} = \frac{-\,dp_{n-1}}{\frac{\partial f_{n-1}\,(u_{n-1})}{\partial u_{n-1}}\,p^2_{n-1} + c_n\,\frac{\partial C_{n-1}\,(u_{n-1})}{\partial u_{n-1}} - \frac{\partial \Omega_{n-1}\,(u_{n-1})}{\partial u_{n-1}}}$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration:

$$f_{n-1}\,(u_{n-1})\;p^2_{n-1} = -\,c_n\;C_{n-1}\,(u_{n-1}) + \Omega_{n-1}\,(u_{n-1}) + c_{n-1},$$ wo c_{n-1} eine Integrationsconstante ist.

Für die A haben wir gefunden:

$$A_{n,n} = C'_{n-1}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-2})\;C_{n-1}\,(u_{n-1})\;f_n\,(u_n);\;\; A_{n,\varkappa} = 0\;\;(\varkappa = 1, 2 \,.\,.\, n-1)\;\; \frac{\partial A_{\varkappa,\lambda}}{\partial u_n} = 0\;\;(\varkappa,\lambda = 1 \,.\,.\, n-1)$$

$$A_{n-1,\,n-1} = C'_{n-1}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-2})\;f_{n-1}\,(u_{n-1});\;\; A_{n-1,\,\varkappa} = 0\;\;(\varkappa = 1, 2 \,.\,.\, n-2)\;\; \frac{\partial A_{\varkappa,\lambda}}{\partial u_{n-1}} = 0\;\;(\varkappa,\lambda = 1, 2 \,.\,.\, n-2)$$

$$\Omega = \Omega'_{n-2}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-2}) + C'_{n-1}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-2})\;\Omega_{n-1}\,(u_{n-1}) + C'_{n-1}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-2})\;C_{n-1}\,(u_{n-1})\;\Omega_n\,(u_n)$$

Fährt man so fort bis zur Integration der $(n-i+1)^{\text{ten}}$ Differentialgleichung, so wird sich ergeben:

$$\left.\begin{aligned} A_{n,n} &= C'_{n-i+1}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-i})\;C_{n-i+1}\,(u_{n-i+1}) \,.\,.\,.\,.\, C_{n-1}\,(u_{n-1})\;f_n\,(u_n) \\ A_{n-1,\,n-1} &= C'_{n-i+1}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-i})\;C_{n-i+1}\,(u_{n-i+1}) \,.\,.\,.\,.\, C_{n-2}\,(u_{n-2})\;f_{n-1}\,(u_{n-1}) \\ &\,. \\ A_{n-i+1,\,n-i+1} &= C'_{n-i+1}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-i})\;f_{n-i+1}\,(u_{n-i+1}) \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

$A_{\varkappa,\lambda} = 0\;\;(\varkappa,\lambda = n-i+1,\, n-i+2 \,.\,.\, n)$; die übrigen $A_{\varkappa,\lambda}$ sind von $u_n \,.\,.\, u_{n-i+1}$ unabhängig.

$$\Omega = \Omega'_{n-i}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-i}) + C'_{n-i+1}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-i})\;\Omega_{n-i+1}\,(u_{n-i+1}) + C'_{n-i+1}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-i})\;C_{n-i+1}\,(u_{n-i+1})\;\Omega_{n-i+2}\,(u_{n-i+2}) +$$
$$C'_{n-i+1}\,(u_1 \,.\,.\, u_{n-i})\;C_{n-i+1}\,(u_{n-i+1})\;C_{n-i+2}\,(u_{n-i+2}) \,.\,.\,.\, C_{n-1}\,(u_{n-1})\;\Omega_n\,(u_n)$$

$$p^2_{n-i+k} = \frac{\Omega_{n-i+k}\,(u_{n-i+k}) - c_{n-i+k+1}\;C_{n-i+k}\,(u_{n-i+k}) + c_{n-i+k}}{f_{n-i+k}\,(u_{n-i+k})}$$

Die nächstfolgende zu integrierende Differentialgleichung ist:

$$\frac{du_{n-i}}{2\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} A_{n-i,\varkappa}\,p_\varkappa} = \frac{-\,dp_{n-i}}{\sum\limits_{\varkappa,\lambda=1}^{n} \frac{\partial A_{\varkappa,\lambda}}{\partial u_{n-i}}\,p_\varkappa\,p_\lambda - \frac{\partial \Omega}{\partial u_{n-i}}}$$

Zunächst muss wiederum sein:

$$A_{n-i,\varkappa} = 0 \;\text{ für } \varkappa = 1, 2 \,.\,.\,.\, n-i-1, \;\text{ ferner}$$

$$\frac{\partial A_{\varkappa,\lambda}}{\partial u_{n-i}} = 0 \;\text{ für } \varkappa, \lambda = 1, 2 \,.\,.\,.\, n-i-1$$

Die Differentialgleichung geht dann über in:

$$\frac{du_{n-i}}{2\,A_{n-i,\,n-i}\,p_i} = \frac{-\,dp_{n-i}}{\sum\limits_{s=n-i}^{n} \frac{\partial A_{s,s}}{\partial u_{n-i}}\,p^2_s - \frac{\partial \Omega}{\partial u_{n-i}}}$$

Unter Berücksichtigung der in (A) gefundenen Ausdrücke werden die einzelnen Glieder des Nenners der Differentialgleichung:

$$p^2_{n-i+1} \frac{\partial A_{n-i+1, n-i+1}}{\partial u_{n-i+1}} = \frac{\Omega_{n-i+1}(u_{n-i+1}) - c_{n-i+2}\; C_{n-i+1}(u_{n-i+1}) + c_{n-i+1}}{f_{n-i+1}(u_{n-i+1})} \frac{\partial C'_{n-i+1}(u_1 \,..\, u_{n-i})}{\partial u_{n-i}} f_{n-i+1}(u_{n-i+1})$$

$$p^2_{n-i+2} \frac{\partial A_{n-i+2, n-i+2}}{\partial u_{n-i+2}} = \frac{\Omega_{n-i+2}(u_{n-i+2}) - c_{n-i+3}\, C_{n-i+2}(u_{n-i+2}) + c_{n-i+2}}{f_{n-i+2}(u_{n-i+2})} \frac{\partial C'_{n-i+1}(u_1 \,..\, u_{n-i})}{\partial u_{n-i}} C_{n-i+1}(u_{n-i+1})\; f_{n-i+2}(u_{n-i+2})$$

. . . .

$$p^2_{n-i+k} \frac{\partial A_{n-i+k, n-i+k}}{\partial u_{n-i+k}} = \frac{\Omega_{n-i+k}(u_{n-i+k}) - c_{n-i+k+1}\; C_{n-i+k}(u_{n-i+k}) + c_{n-i+k}}{f_{n-i+k}(u_{n-i+k})} \,.$$

$$\frac{\partial C'_{n-i+1}(u_1 \,..\, u_{n-i})}{\partial u_{n-i}} C_{n-i+1}(u_{n-i+1})\; C_{n-i+2}(u_{n-i+2}) \dots C_{n-i+k-1}(u_{n-i+k-1})\; f_{n-i+k}(u_{n-i+k})$$

. . . .

$$p^2_n \frac{\partial A_{n, n}}{\partial u_n} = \frac{\Omega_n(u_n) + c_n}{f_n(u_n)} \frac{\partial C'_{n-i+1}(u_1 \,..\, u_{n-i})}{\partial u_{n-i}} C_{n-i+1}(u_{n-i+1}) \dots C_{n-1}(u_{n-1})\; f_n(u_n)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_{n-i}} = \frac{\partial \Omega'_{n-i}(u_1 \,..\, u_{n-i})}{\partial u_{n-i}} + \frac{\partial C'_{n-i+1}}{\partial u_{n-i}} \Omega_{n-i+1}(u_{n-i+1}) + \frac{\partial C'_{n-i+1}(u_1, u_2 \,..\, u_{n-i})}{\partial u_{n-i}} C_{n-i+1}(u_{n-i+1})\; \Omega_{n-i+2}(u_{n-i+2}) +$$

$$\dots \frac{\partial C'_{n-i+1}(u_1 \,..\, u_{n-i})}{\partial u_{n-i}} C_{n-i+1}(u_{n-i+1})\; C_{n-i+2}(u_{n-i+2}) \dots C_{n-1}(u_{n-1})\; \Omega_n(u_n)$$

Durch Zusammenziehen wird der Nenner von dp_{n-i} gleich

$$\frac{\partial A_{n-i, n-i}}{\partial u_{n-i}} p^2_{n-i} + c_{n-i+1} \frac{\partial C'_{n-i+1}(u_1, u_2 \,..\, u_{n-i})}{\partial u_{n-i}} - \frac{\partial \Omega'_{n-i}(u_1 \,..\, u_{n-i})}{\partial u_{n-i}}$$

Die Differentialgleichung geht also über in:

$$\frac{du_{n-i}}{2 A_{n-i, n-i}\, p_i} = \frac{-dp_{n-i}}{\frac{\partial A_{n-i, n-i}}{\partial u_{n-i}} p^2_i + c_{n-i+1} \frac{\partial C'_{n-i+1}(u_1 \,..\, u_{n-i})}{\partial u_{n-i}} - \frac{\partial \Omega'_{n-i}(u_1 \,..\, u_{n-i})}{\partial u_{n-i}}}$$

Damit hier eine Integration möglich werde, muss sein:

$$A_{n-i, n-i} = C'_{n-i}(u_1, u_2 \,..\, u_{n-i-1})\; f_{n-i}(u_{n-i})$$
$$C'_{n-i+1} = C'_{n-i}(u_1 \,..\, u_{n-i-1})\; C_{n-i}(u_{n-i})$$
$$\Omega'_{n-i} = C'_{n-i}(u_1 \dots u_{n-i-1})\; \Omega_{n-i}(u_{n-1})$$

Alsdann erhalten wir nach Multiplication mit $C'_{n-i}(u_1 \,..\, u_{n-i-1})$

$$\frac{du_{n-i}}{2 f_{n-i}(u_{n-i})\; p_{n-i}} = \frac{-dp_{n-i}}{\frac{\partial f_{n-i}(u_{n-i})}{\partial u_{n-i}} p^2_{n-i} + c_{n-i+1} \frac{\partial C_{n-i}(u_{n-i})}{\partial u_{n-i}} - \frac{\partial \Omega_{n-i}(u_{n-i})}{\partial u_{n-i}}}$$

Durch Integration ergiebt sich dann:

$$f_{n-i}(u_{n-i})\; p^2_{n-i} = \Omega'_{n-i}(u_{n-i}) - c_{n-i+1}\; C_{n-i}(u_{n-i}) + c_{n-i}$$

Fahren wir so fort, so gelangen wir schliesslich zu der nten Differentialgleichung:

$$\frac{du_1}{2 A_{1,1}\, p_1} = \frac{-dp_1}{p_1 \frac{\partial A_{1,1}}{\partial u_1} + p^2_2 \frac{\partial A_{2,2}}{\partial u_1} + \,..\, p^2_n \frac{\partial A_{n,n}}{\partial u_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial u_1}}$$

wenn wir schon berücksichtigen: $A_{\varkappa, \lambda} = 0 \quad \varkappa \lesseqgtr \lambda$

Setzen wir die für die p erhaltenen Werte ein, so ergiebt sich:

$$\frac{du_1}{2 A_{1,1}\, p_1} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial A_{1,1}}{\partial u_1} p^2_1 + c_2 \frac{\partial C'_1(u_1)}{\partial u_1} - \frac{\partial \Omega'_1(u_1)}{\partial u_1}}$$

Es muss also $A_{1,1}$ gleich einer Function von p_1 sein. Setzen wir also $A_{1,1} = f_1(u_1)$, $C'_1(u_1) = C_1(u_1)$; $\Omega'_1(u_1) = \Omega_1(u_1)$, so erhalten wir durch Integration:

$$f_1(u_1)\, p^2_1 = \Omega_1(u_1) - c_2\; C_1(u_1) + c_1$$

Wir sind also zu folgendem Resultat gelangt:

Soll die partielle Hamiltonsche Differentialgleichung durch Trennung der Variabeln möglich sein, und sollen sich die n Lösungen direct aus dem System der totalen Differentialgleichungen ergeben, so müssen in der Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} \sum_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa\lambda}\, p_\varkappa\, p_\lambda - \Omega - h = 0$$

die betreffenden Grössen von folgender Form sein:

$$\begin{aligned}
A_{n,n} &= C_1(u_1)\; C_2(u_2) \ldots C_{n-1}(u_{n-1})\; f_n(u_n)\\
A_{n-1,n-1} &= C_1(u_1)\; C_2(u_2) \ldots C_{n-2}(u_{n-2})\; f_{n-1}(u_{n-1})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{n-i} &= C_1(u_1)\; C_2(u_2) \ldots C_{n-i}(u_{n-i-1})\; f_{n-i}(u_{n-i}) \qquad \text{(B)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_2 &= C_1(u_1)\; f_2(u_2)\\
A_1 &= f_1(u_1)\\
\Omega &= \Omega_1(u_1) + C_1(u_1)\; \Omega_2(u_2) + C_1(u_1)\; C_2(u_2)\; \Omega_3(u_3) + C_1(u_1) + C_2(u_2) \ldots C_{n-1}(u_{n-1})\; \Omega_n(u_n)
\end{aligned}$$

Die n Lösungen werden dann:

$$\begin{aligned}
p^2_n &= \frac{2\,\Omega_n(u_n) + c_n}{f_n(u_n)}\\
p^2_{n-1} &= \frac{2\,\Omega_{n-1}(u_{n-1}) - c_n\; C_n(u_{n-1}) + c_{n-1}}{f_{n-1}(u_{n-1})} \qquad \text{(C)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p^2_{n-i} &= \frac{2\,\Omega_{n-i}(u_{n-i}) - c_{n-i+1}\; C_{n-i}(u_{n-i}) + c_{n-i}}{f_{n-i}(u_{n-i})}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p^2_1 &= \frac{2\,\Omega_1(u_1) - c_2\; C_1(u_1) + c_1}{f_1(u_1)}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Werte der p ergiebt sich, dass $c_1 = 2\,h$ sein muss.

Für die Function W erhalten wir dann den Ausdruck:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \int \sqrt{2\,\Omega_i(u_i) - c_{i+1}\; C_i(u_i) + c_i}\; \frac{du_i}{\sqrt{f_i(u_i)}}$$

wobei zu beachten ist, dass $c_{n+1} = 0$; $c_1 = 2\,h$ ist.

Die Integralgleichungen werden dann:

$$t - \tau = \int \frac{du_1}{2\sqrt{2\,\Omega_1(u_1) - c_2\; C_1(u_1) + c_1}\sqrt{f_1(u_1)}}$$

$$\gamma_k = \int \frac{1}{2\sqrt{2\,\Omega_k(u_k) - c_{k+1}\; C_k(u_k) + c_k}}\, \frac{du_k}{\sqrt{f_k(u_k)}} - \int \frac{C_{k-1}(u_{k-1})}{2\sqrt{2\,\Omega_{k-1}(u_{k-1}) - c_k\; C_{k-1}(u_{k-1}) + c_{k-1}}}\, \frac{du_{k-1}}{\sqrt{f_{k-1}(u_{k-1})}}$$

für $k = 2, 3 \ldots n$, wenn die γ willkürliche Constante sind.

Um eine andere Form für die partielle Differentialgleichung zu erhalten, können wir annehmen, dass die Grössen A den Factor $\varphi(u_1, u_2 \ldots u_n)$ gemeinsam haben, sodass $A_{\varkappa,\lambda} = \varphi\; B_{\varkappa,\lambda}$. Nach Division der beiden Seiten der partiellen Differentialgleichung durch φ geht dieselbe über in:

$$\frac{1}{2} \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} B_{\varkappa,\lambda}\, p_\varkappa\, p_\lambda = \frac{\Omega}{\varphi} + \frac{h}{\varphi} \qquad (3)$$

Um die durch Trennung der Variablen integrable Form zu erhalten, können wir die voraufgegangenen Untersuchungen benutzen, wenn wir $\overline{\Omega} = \frac{\Omega}{\varphi} + \frac{h}{\varphi}$ setzen.

Nach dem System (B) wird dann $B_{\varkappa,\lambda} = 0 \quad \varkappa \lesseqgtr \lambda$

$$B_{n,n} = C_1(u_1)\, C_2(u_2) \,.\,.\, C_{n-1}(u_{n-1})\, f_n(u_n)$$
$$B_{n-1,n-1} = C_1(u_1)\, C_2(u_2) \,.\,.\, C_{n-2}(u_{n-2})\, f_{n-1}(u_{n-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_1 = f_1(u_1)$$
$$\frac{\Omega}{\varphi} = g_1(u_1) + C_1(u_1)\, g_2(u_2) + \ldots C_1(u_1)\, C_2(u_2) \,.\,.\, C_{n-1}(u_{n-1})\, g_n(u_n)$$
$$\frac{1}{\varphi} = \varphi_1(u_1) + C_1(u_1)\, \varphi_2(u_2) + \ldots C_1(u_1)\, C_2(u_2) \ldots C_{n-1}(u_{n-1})\, \varphi_n(u_n)$$

Es hat alsdann die vollständige Lösung W die Form:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \int \sqrt{2 g_i(u_i) + 2h\varphi_i(u_i) - c_{i+1}\, C_i(u_i) + c_i}\; \frac{du_i}{\sqrt{f_i(u_i)}}$$

wo $c_{n+1} = 0$ zu setzen ist. Setzen wir die hieraus sich ergebenden Werte für $p_\varkappa$ in die Gleichung (3), so muss $c_1 = 0$ sein, wenn die Gleichung (3) realisiert werden soll. Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung hat dann die Form:

$$\frac{f_1(u)}{\varphi_1(u_1) + \,.\,.\, C_1(u_1) \ldots \varphi_n(u_n)} + \ldots \frac{C_1(u_1) \ldots C_{s-1}(u_{s-1})\, f_s(u_s)}{\varphi_1(u_1) + \ldots C_1(u_1) \ldots \varphi_n(u_n)} + \ldots =$$
$$\frac{g_1(u_1) + C_1(u_1)\, g_2(u_2) + \ldots + C_1(u_1) \ldots C_{n-1}(u_{n-1})\, g_n(u_n)}{\varphi_1(u_1) + \ldots C_1(u_1) \ldots \varphi_n(u_n)} + h$$

Die Integralgleichungen werden dementsprechend:

$$t - \tau = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{\varphi_i(u_i)}{\sqrt{2 g_i(u_i) + 2h\varphi_i(u_i) - c_{i+1}\, C_i(u_i) + c_i}}\; \frac{du_i}{\sqrt{f_i(u_i)}}$$

$$\gamma_k = \int \frac{1}{2\sqrt{2 g_k(u_k) + 2h\,\varphi_k(u_k) - c_{k+1}\, C_k(u_k) + c_k}}\; \frac{du_k}{\sqrt{f_k(u_k)}}$$
$$- \int \frac{C_{k-1}(u_{k-1})}{2\sqrt{2 g_{k-1}(u_{k-1}) + 2h\,\varphi_{k-1}(u_{k-1}) - c_k\, C_{k-1}(u_{k-1}) + c_{k-1}}}\; \frac{du_{k-1}}{\sqrt{f_{k-1}(u_{k-1})}}$$
$$k = (2, 3 \,.\,.\, n); \quad c_{n+1} = 0$$

Der Fall, in welchem mehrere Variable explicite in der partiellen Differentialgleichung nicht vorkommen, und die $A_{\varkappa\lambda}$ den Bedingungen des Systems (B) entsprechen, erledigt sich ohne weiteres.

Ist ferner $A_{\varkappa,\lambda} = 0$ für $\varkappa \lesseqgtr \lambda$; $A_{\varkappa,\varkappa} = C_\varkappa(u_\varkappa)$ für $\varkappa = 1, 2 \,.\,.\, n$, so muss $\Omega = \Omega_1(u_1) + \Omega_2(u_2) \,.\,.\, \Omega_n(u_n)$ sein, und die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung nimmt die Form an:

$$C_1(u_1)\, p_1^2 + C_2(u_2)\, p_2^2 + \,.\,.\, C_n(u_n)\, p_n^2 = 2\Omega_1(u_1) + 2\Omega_2(u_2) + 2\Omega_n(u_n) + 2h$$

Das hierfür gültige Linienelement ist von der Form:

$d^2_s = d\mu_1^2 + d\mu_2^2 + \,.\,.\, d\mu_n^2$, denn, wenn wir $\mu_i = \int \frac{du_i}{\sqrt{C_i(u_i}}$ setzen, geht die Differentialgleichung über in:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \mu_1}\right)^2 + \,.\,.\, \left(\frac{\partial W}{\partial \mu_n}\right)^2 = 2\Omega'_1(\mu_1) + \,.\,.\, 2\Omega'_n(\mu_n) + 2h$$

für welche Gleichung das Linienelement die betreffende Form hat.

2.

Um noch allgemeinere Formen für die $A_{\varkappa,\lambda}$ zu erhalten, wenden wir die Jacobische Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung an. Um symmetrische Resultate zu erhalten, setzen wir die gegebene Hamiltonsche partielle Differentialgleichung:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma A_{\varkappa,\lambda}\, p_\varkappa p_\lambda - \Omega = h = \alpha_1 = H_1 \qquad (1)$$

Die n — 1 übrigen Lösungen seien $H_2 = \alpha_2, \ldots H_n = \alpha_n$. Gemäss der Jacobischen Methode haben diese die Bedingungen zu erfüllen:

$$(H_i H_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Durch Elimination ergeben sich die p als Functionen der u und α, also $p_i = \omega_i (u_1 \ldots u_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n)$ $(i = 1 \ldots n)$ und es wird $dW = p_1\, du_1 + \ldots p_n\, du_n$. Setzen wir diese für die p erhaltenen Functionen in die Functionen H ein, so werden diese Gleichungen zu Identitäten und wenn wir dann nach α_s differentiieren, so erhalten wir das System:

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial H_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial H_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_s} + \ldots + \frac{\partial H_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial \alpha_s} = 0 \\
\frac{\partial H_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial H_2}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_s} + \ldots + \frac{\partial H_2}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial \alpha_s} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial H_s}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial H_s}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_s} + \ldots + \frac{\partial H_s}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial \alpha_s} = 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial H_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial H_n}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_s} + \ldots + \frac{\partial H_n}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial \alpha_s} = 0
\end{array} \qquad (A)$$

Solcher Systeme erhalten wir n. Fassen wir sämtliche Gleichungen zusammen, in denen die Function H_1 vorkommt, so erhalten wir ein System von n Gleichungen, aus dem sich die partiellen Differentialquotienten von H_1 nach den p bestimmen lassen. Setzen wir

$\Delta = \left|\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}\right|$; und bezeichnen wir die zu $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}$ gehörende Unterdeterminate mit $\Delta_{k,i}$; so erhalten wir, da Δ nicht gleich null sein kann:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_i} = \frac{\Delta_{1,1}}{\Delta}; \quad \frac{\partial H_1}{\partial p_2} = \frac{\Delta_{1,2}}{\Delta}; \ldots \quad \frac{\partial H_1}{\partial p_n} = \frac{\Delta_{1,n}}{\Delta} \qquad (2)$$

Aus Gleichung (1) ergiebt sich durch Differentiation:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_s} = \sum_{i=1}^{n} A_{i,s}\, p_i$$

Alsdann geht das System (2) über in:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{i,1}\, p_i = B_{1,1}\,; \quad \sum_{i=1}^{n} A_{i,2}\, p_i = B_{1,2}\,; \ \ldots \ \sum_{i=1}^{n} A_{i,n}\, p_n = B_{1,n} \qquad (3)$$

wenn wir noch $B_{i,k} = \frac{\Delta_{i,k}}{\Delta}$ setzen.

Da die Gleichungen des Systems (3) zu Identitäten werden, wenn wir für die p die betr. Functionen ω einführen, so erhalten wir durch partielle Differentiation der t[ten] Gleichung des Systems (3) nach Einsetzung der Functionen ω für die p nach den α das folgende System:

$$\begin{array}{l}
A_{1,t}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} + A_{2,t}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} + \ldots A_{n,t}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial B_{1,t}}{\partial \alpha_1} \\
A_{1,t}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2} + A_{2,t}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} + \ldots A_{n,t}\frac{\partial p_n}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial B_{1,t}}{\partial \alpha_2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{1,t}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_n} + A_{2,t}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_n} + \ldots + A_{n,t}\frac{\partial p_n}{\partial \alpha_n} = \frac{\partial B_{1,t}}{\partial \alpha_n}
\end{array}$$

Aus diesem System ergiebt sich: $$A_{s,t} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1,t}}{\partial a_\mu} \frac{\Delta_{\mu,s}}{\Delta} \tag{4'}$$

Führen wir noch die Grössen B ein, so wird:

$$A_{s,t} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1,t}}{\partial a_\mu} B_{\mu,s} \tag{4}$$

Dies ist die Formel, welche der Formel (17) auf Seite 10 in der Abhandlung des Herrn Stäckel entspricht.

Bei dem Beweis, dass $A_{s,t} = A_{t,s}$ ist, geht Herr Stäckel von einer Formel aus, die sich aus der Bedingung ergiebt, dass Ω von den Constanten α unabhängig ist. Das Gleiche lässt sich beweisen, ohne von dieser Bedingung Gebrauch zu machen, wenn man die Determinanteneigenschaft benutzt:

$$\sum_{i=1}^{n} B_{1,i} \frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \begin{cases} 0 & k \lessgtr 1 \\ 1 & k = 1 \end{cases}$$

Ebenso muss sein: $$\sum_{i=1}^{n} B_{1,i} \frac{\partial p_i}{\partial a_\mu} = \begin{cases} 0 & k \lessgtr 1 \\ 1 & k = 1 \end{cases}$$

Da diese Gleichungen nach Einsetzung der für die p erhaltenen Functionen Identitäten werden müssen, so erhalten wir durch Differentiation derselben nach a_μ und a_k:

$$\sum_{i=1}^{n} B_{1,i} \frac{\partial^2 p_i}{\partial a_k \, \partial a_\mu} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1,i}}{\partial a_\mu} \frac{\partial p_i}{\partial a_k} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_{1,i} \frac{\partial^2 p_i}{\partial a_\mu \, \partial a_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1,i}}{\partial a_k} \frac{\partial p_i}{\partial a_\mu} = 0$$

Subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten, so erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1,i}}{\partial a_\mu} \frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1,i}}{\partial a_k} \frac{\partial p_i}{\partial a_\mu}$$

Setzen wir der Reihe nach $k = 1, 2 \ldots n$, multiplicieren wir beide Seiten der Gleichung der Reihe nach mit $B_{1,s}, B_{2,s} \ldots B_{n,s}$ und addieren wir die erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial B_{1,s}}{\partial a_\mu} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{k,s} \frac{\partial B_{1,i}}{\partial a_k} \frac{\partial p_i}{\partial a_\mu} \tag{5}$$

Setzen wir der Reihe nach $\mu = 1, 2 \ldots n$, multiplicieren wir diese Gleichung der Reihe nach mit $B_{1,t}, B_{2,t} \ldots B_{n,t}$, und addieren, so erhalten wir:

$$\sum_{\mu=1}^{1} B_{\mu,t} \frac{\partial B_{1,s}}{\partial a_\mu} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{k,s} \frac{\partial B_{1,i}}{\partial a_k} \sum_{\mu=1}^{n} B_{\mu,t} \frac{\partial p_i}{\partial a_\mu}$$

Hieraus ergiebt sich: $$\sum_{\mu=1}^{n} B_{\mu,t} \frac{\partial B_{1,s}}{\partial a_\mu} = \sum_{k=1}^{n} B_{k,s} \frac{\partial B_{1,t}}{\partial a_k}$$

Also: $A_{s,t} = A_{t,s}$.

Hieran möge sofort die Formel für $A_{s,s}$ angeschlossen werden, wenn $A_{i,k} = 0$ für $k \lessgtr i$. Für diesen Fall gehen die Gleichungen (3) über in $A_{1,1}\, p_1 = B_{1,1}$; $A_{2,2}\, p_2 = B_{1,2} \ldots A_{n,n}\, p_n = B_{1,n}$.

Führen wir die Determinante $D = \left| \frac{\partial p^2_\varkappa}{\partial a_\mu} \right|$ ein, so ist bekanntlich:

$$2^n \Delta\, p_1\, p_2 \ldots p_n = D \quad \text{und} \quad 2^{n-1} \Delta_{1,s}\, p_1 \ldots p_{s-1}\, p_{s+1} \ldots p_n = D_{1,s}$$

Aus beiden Formeln ergiebt sich durch Division: $$\frac{D_{1,s}}{D} = \frac{\Delta_{1,s}}{2\, p_s \Delta} \tag{6}$$

Es ist $B_{1,s} = \frac{\Delta_{1,s}}{\Delta} = 2 p_s \frac{D_{1,s}}{D}$, wenn man Gleichung (6) berücksichtigt.

Da nach (5) $\frac{B_{1/s}}{p_s} = A_{s,s}$ ist, so folgt $A_{s,s} = \frac{2 D_{1/s}}{D}$ (7)

Aus den Formeln (3), (4) und der Bedingung $A_{s/t} = A_{t/s}$ lassen sich auch Relationen ableiten, welche bestehen müssen, damit Ω frei von den willkürlichen Constanten a ist. Nach der t^ten^ Gleichung des Systems (3) muss sein:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{i/t}\, p_i = B_{1/t}$$

Setzen wir hierin den aus (4) sich ergebenden Wert für $A_{i/t}$ ein, und beachten, dass $A_{i/t} = A_{t/i}$ ist, so folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} B_{\mu/t} \frac{\partial B_{1/i}}{\partial a_\mu}\, p_i = B_{1/t}$$

Setzen wir jetzt der Reihe nach $t = 1, 2 \ldots n$ und multiplicieren wir die einzelnen Gleichungen mit $\frac{\partial p_t}{\partial a_s}, \frac{\partial p_2}{\partial a_s} \cdots \frac{\partial p_n}{\partial a_s}$ und addieren die so erhaltenen Gleichungen, so erhalten wir:

$$\sum_{i\mu} \frac{\partial B_{1/i}}{\partial a_\mu}\, p_i \sum_t B_{\mu/t} \frac{\partial p_t}{\partial a_s} = \sum_{t=1}^{n} B_{1/t} \frac{\partial p_t}{\partial a_s}$$

$$\sum_{t=1}^{n} B_{\mu/t} \frac{\partial p_t}{\partial a_s} = 0 \text{ für } s \lessgtr \mu \quad \text{aber} \quad \sum_{t=1}^{n} B_{s/t} \frac{\partial p_t}{\partial a_s} = 1 \qquad (s = 1, 2 \ldots n)$$

Demnach ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1/i}}{\partial a_s}\, p_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1/i}}{\partial a_1}\, p_i &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Diese Bedingungsgleichungen müssen bestehen, damit durch Einsetzen der Werte für $A_{s/t}$ aus den Gleichungen (4) in die Gleichungen des Systems (3) diese Gleichungen identisch befriedigt werden. Wir gelangen also zu dem folgenden Satz:

Wenn die Coefficienten A der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung die Werte: $A_{s/t} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1/t}}{\partial a_\mu} B_{\mu_s}$ haben, so muss $A_{s/t} = A_{t/s}$ sein, und es müssen die Bedingungsgleichungen erfüllt werden:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1/i}}{\partial a_s}\, p_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1/i}}{\partial a_1}\, p_i = 1 \qquad (s = 2, 3 \ldots n)$$

Erst mit Erfüllung dieser Bedingungsgleichungen werden die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{i/t}\, p_i = B_{1/t} \qquad (t = 1, 2 \ldots n)$$

nach Einsetzen der Werte für $A_{i/t}$ zu Identitäten.

Diese Formeln (8) leitet Herr **Stäckel** in seiner Habilitationsschrift ab aus der Bedingung, dass die Kräftefunction Ω kein a enthalten kann. Thatsächlich sind diese Bedingungen nur Folgerungen aus den Formeln für die Coefficienten $A_{s/t}$. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass, wenn diese Bedingungen erfüllt werden, Ω auch kein a enthalten kann.

Berücksichtigen wir die Gleichungen des Systems (3), so geht die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung über in:

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n} p_\lambda\, B_{1/\lambda} = \Omega + a_1$$

Diese Gleichung muss zu einer Identität werden, wenn wir die Functionen ω für die p einführen. Differentiieren wir dann nach a_s $(s = 1, 2, 3 \ldots n)$, so erhalten wir:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial p_\lambda}{\partial a_1} B_{1/\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{2} p_\lambda \frac{\partial B_1 \lambda}{\partial a_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} + 1$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial p_\lambda}{\partial a_s} B_{1/\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{2} p_\lambda \frac{\partial B_1 \lambda}{\partial a_s} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_s}$$

Die ersten Glieder der linken Seite dieser beiden Gleichungen werden gleich 1 resp. 0, also erhalten wir:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{2} p_\lambda \frac{\partial B_{1\lambda}}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2}; \quad \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{2} p_\lambda \frac{\partial B_{1\lambda}}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_s}$$

Wenden wir jetzt unsere Formeln (8) an, so folgt aus diesen Gleichungen;

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} = 0; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_s} = 0; \quad \text{für } s = 2, 3 \,..\, n \tag{9}$$

Wir haben also gezeigt, dass die Bedingungen (8) die Gleichungen (9) nach sich ziehen. In Folge dieser Bedingungen (8) kann Ω kein α enthalten. Der Wert für Ω ergiebt sich ohne weiteres aus der Hamiltonschen Differentialgleichung, wenn man für die p die betreffenden Functionen ω einführt.

Es ist ferner nachzuweisen, dass die sich aus (4) ergebenden Werte für die $A_{s,t}$ von den α unabhängig sind. Herr Stäckel macht dies in seiner Habilitationsschrift zu einer besonderen Bedingung. Es lässt sich zeigen, dass diese Bedingung ohne weiteres erfüllt ist.

Die Gleichungen (4) sind unter der Voraussetzung abgeleitet, dass die $A_{s,t}$ von den α unabhängig sind. Es muss sich also auch aus diesen Formeln (4) direct ergeben, dass die $A_{s,t}$ von den α unabhängig sind. Nehmen wir zunächst an, die $A_{s,t}$ enthielten α, so würde sich aus den Gleichungen (3) durch Differentiation nach α_s, wenn wir uns die Functionen ω für die p eingesetzt denken, ergeben:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{i,t} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} + \sum_{i} \frac{\partial A_{i,t}}{\partial \alpha_s} p_i = \frac{\partial B_{1,t}}{\partial \alpha_s} \qquad (t, s = 1, 2 \,..\, n)$$

Es ist nun

$$\sum_{i} A_{i,t} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial B_{1,t}}{\partial \alpha_s}, \text{ folglich ist}$$

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{\partial A_{i,t}}{\partial \alpha_s} p_i = 0 \quad (s, t = 1, 2 \,..\, n) \tag{10}$$

Da kein p gleich null ist, und sämtliche p von einander unabhängig sind, so folgt, wenn dieses Gleichungssystem bestehen soll, dass $\frac{\partial A_{i,t}}{\partial \alpha_s} = 0$ $(i = 1, 2 \,..\, n)$, d. h. die $A_{i,t}$ $(i = 1, 2 \,..\, n)$ sind von den α unabhängig. Dasselbe gilt von allen $A_{i,t}$ $(i, t = 1, 2 \,..\, n)$. Dasselbe gilt auch, wenn $A_{i,t} = 0$ für $i \lesseqgtr t$. Alsdann geht die Formel (10) über in $\frac{\partial A_{t,t}}{\partial \alpha_s} p_t = 0$. Da $p_t \lesseqgtr 0$ ist, so muss sein $\frac{\partial A_{t,t}}{\partial \alpha_s} = 0$, was zu zeigen war. Das gleiche gilt für alle $A_{t,t}$ $(t = 1, 2 \,..\, n)$.

Es ist nun unter Anwendung der Formel (4)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_{i,t}}{\partial \alpha_s} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1,t}}{\partial \alpha_\mu} B_{\mu,i}}{\partial \alpha_s} p_i \qquad (s = 1, 2 \,..\, n)$$

Da $A_{i,t} = A_{t,i}$ sein muss, so wird

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_{i,t}}{\partial \alpha_s} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1,i}}{\partial \alpha_\mu} B_{\mu,t}}{\partial \alpha_s} p_i$$

Führen wir die Differentiation auf der rechten Seite aus, so erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_{i,t}}{\partial \alpha_s} p_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 B_{1,i}}{\partial \alpha_\mu \, \partial \alpha_s} B_{\mu,t} + \frac{\partial B_{1,i}}{\partial \alpha_\mu} \frac{\partial B_{\mu,t}}{\partial \alpha_s} \right) p_i \tag{11}$$

Denken wir uns in den Formeln (8) für die p die Functionen ω eingeführt, so werden diese zu Identitäten, und durch Differentiation nach α_s ergiebt sich:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 B_{1,i}}{\partial \alpha_\mu \, \partial \alpha_s} p_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_{1,i}}{\partial \alpha_\mu} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} = 0 \tag{12}$$

Setzen wir den sich aus (12) ergebenden Wert für $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 B_{1,i}}{\partial \alpha_\mu \, \partial \alpha_s} p_i$ in (11) ein, so erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_{i,t}}{\partial \alpha_s} p_i = - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1,i}}{\partial \alpha_\mu} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} B_{\mu,t} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1,i}}{\partial \alpha_\mu} \frac{\partial B_{\mu,t}}{\partial \alpha_s} p_i$$

Unter Benutzung der Formeln (8) geht die Gleichung über in:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_{i,t}}{\partial \alpha_s} p_i = - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1,i}}{\partial \alpha_\mu} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} B_{\mu,t} + \frac{\partial B_{1,t}}{\partial \alpha_s}$$

Nach Formel (5) ist die rechte Seite gleich null. Mithin ist:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_{i,t}}{\partial \alpha_s} p_i = 0 \qquad (s = 1, 2 \, . \, . \, n)$$

Also sind entsprechend unserer vorhergehenden Auseinandersetzung die Ausdrücke:

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1,t}}{\partial \alpha_\mu} B_{\mu,i} \qquad (i,t = 1, 2 \, . \, . \, n)$$

von den α unabhängig.

Wir sind also zu dem Resultat gelangt, dass sämtliche Bedingungen, welche Herr Stäckel in seiner Arbeit aufstellt, von selbst erfüllt werden, sobald nur die p durch Elimination aus der gegebenen Gleichung und ihren $n-1$ Lösungen hervorgegangen sind. Diese Ergebnisse unserer Untersuchuug können wir zu folgendem Satz zusammenfassen:

Sind die Coefficienten der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung von der Form: $A_{s,t} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1,t}}{\partial \alpha_\mu} B_{\mu,s}$, wo $B_{i,k} = \frac{\Delta_{i,k}}{\Delta}$, $\Delta = \left| \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} \right|$ und $\Delta_{i,k}$ die zu $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}$ gehörende Unterdeterminante ist und die p solche Functionen von $u_1, u_2 \ldots u_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ sind, dass sich aus ihnen Functionen von der Form $H_i (u_1 \ldots u_n, p_1 \ldots p_n) = \alpha_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ ableiten lassen, welche die Jacobische Bedingung $(H_i H_k) = 0$ $(i,k = 1, 2 \ldots n)$ erfüllen, und hat die Kräftefunction Ω den aus der Form der $A_{s,t}$ sich ergebenden Ausdruck, so ist stets eine Integration möglich. Die Ausdrücke für die $A_{s,t}$ $(s,t = 1, 2 \ldots n)$ und für Ω sind von den α unabhängig und es ist ferner $A_{s,t} = A_{t,s}$.

3.

Soll die Integration durch Trennung der Variabeln möglich sein, so sind die Grössen p Functionen von der Form $p_i = \omega_i (u_i, \alpha_1 \, . \, . \, \alpha_n)$ $(i = 1, 2 \, . \, . \, n)$. Die sich aus dem System der p ergebenden Functionen $H_i (u_1 \, . \, . \, u_n \; p_1 \, . \, . \, p_n) = \alpha_i$ $(i = 1, 2 \, . \, . \, n)$ erfüllen ohne weiteres die Jacobische Bedingung $(H_i H_k) = 0$. Dementsprechend gilt, wenn die Integration durch Trennung der Variabeln möglich sein soll, folgender Satz:

Sind die Coefficienten der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung von der Form: $A_{s,t} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial B_{1,t}}{\partial \alpha_\mu} B_{\mu,s}$, wo $B_{i,k} = \frac{\Delta_{i,k}}{\Delta}$, $\Delta = \left| \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} \right|$ und $\Delta_{i,k}$ die zu $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}$ gehörende Unterdeterminante ist und $p_i = \omega_i (u_i, \alpha_1, \alpha_2 \, . \, . \, \alpha_n)$ $(i = 1, 2 \, . \, . \, n)$ und hat die Kräftefunction Ω den aus der Form der $A_{s,t}$ sich ergebenden Ausdruck, so ist stets eine Integration durch Trennung der Variablen möglich. Die Ausdrücke für die $A_{s,t}$ $(s,t = 1, 2 \, . \, . \, n)$ und für Ω sind von den α unabhängig und es ist ferner $A_{s,t} = A_{t,s}$.

Besonders einfach wird die Elimination der α aus den Functionen ω, wenn sie folgende Form haben:

$$p_i^2 = 2\varphi_{i,0} (u_i) + 2\alpha_1 \varphi_{i,1} (u_i) + 2\alpha_2 \varphi_{i,2} (u_i) + \cdot \cdot \, 2 \alpha_n \varphi_{i,n} (u_i) \qquad (i = 1, 2 \, . \, . \, n)$$

in welchem Falle wir auf elliptische Functionen kommen.

Alsdann ergiebt sich:

$$\Delta \, 2\alpha_i = \left(p_1^2 - 2\varphi_{1,0} (u_1)\right) \Delta_{1,i} + \left(p_2^2 - 2\varphi_{2,0} (u_2)\right) \Delta_{2,i} + \cdot \cdot \left(p_n^2 - 2\varphi_{n,0} (u_i)\right) \Delta_{n,i}$$

$$H_1 = \alpha_1 = \frac{1}{2} \left(p_1^2 \frac{\Delta_{1,1}}{\Delta} + p_2^2 \frac{\Delta_{2,1}}{\Delta} + \cdot \cdot \, p_n^2 \frac{\Delta_{n,1}}{\Delta}\right) - \varphi_{1,0} \frac{\Delta_{1,1}}{\Delta} - \cdot \cdot \, \varphi_{n,0} \frac{\Delta_{n,1}}{\Delta}$$

Es ist also: $A_{i,i} = \frac{\Delta_{i,1}}{\Delta}$; $A_{i,t} = 0 \quad i \lesseqgtr t$

$$\Omega = \sum_s \varphi_{s,0}(u_s) \frac{\Delta_{s,1}}{\Delta}$$

Die gleichen Ausdrücke ergeben sich aus den Formeln (7) und die Function W wird:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \int \sqrt{2\varphi_{i,1}(u_i) + 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_{i,k}(u_k)}\, du_k$$

Ferner sei hier auf den Fall hingewiesen, in welchem die Kräfte-Function Ω nicht alle Variabeln enthält. Es seien z. B. die Variabeln $u_{i+1}, u_{i+2} \ldots u_n$ in Ω nicht enthalten. In diesem Falle sind dann Lösungen der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung $p_{i+1} = \alpha_{i+1}$; $p_{i+2} = \alpha_{i+2}$; .. $p_n = \alpha_n$. Dementsprechend ist $H_{i+1} = \alpha_{i+1}$, $H_{i+2} = \alpha_{i+2}$; .. $H_n = \alpha_n$. Unter dieser Voraussetzung wird dann:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} & \ldots & \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} & \ldots & \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_i} \end{vmatrix}$$

und die Werte für $A_{s,t}$ ergeben sich dann aus den Formeln (4).

4.

Es soll nun gezeigt werden, dass auch die directe Annahme der Trennung der Variabeln zu den gleichen Formeln führt, wie in dem allgemeinen Fall, was ja auch zu erwarten ist, da ja auch die Ausdrücke der A zurückgeführt sind auf die Functionen ω, auf diejenigen Functionen, vermittelst deren die p durch die u ausgedrückt werden.

Ist wiederum $H_1 = \alpha_1$ die gegebene Hamiltonsche partielle Differentialgleichung, so seien $H_2 = \alpha_2$ .. $H_n = \alpha_n$ die n−1 Lösungen dieser Differentialgleichung. Es seien ferner die aus diesen n Gleichungen erhaltenen $p_i = \omega_i (u_1, u_2 \ldots u_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$.

Denken wir uns die für die p erhaltenen Functionen ω in das System der H eingesetzt, so wird dieses identisch erfüllt, und durch Differentiation nach den Variabeln u erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u_k} + \frac{\partial H_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial u_k} + \ldots + \frac{\partial H_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial u_k} + \frac{\partial H_1}{\partial u_k} &= 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u_k} + \frac{\partial H_2}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial u_k} + \ldots + \frac{\partial H_2}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial u_k} + \frac{\partial H_2}{\partial u_k} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{\partial H_n}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u_k} + \frac{\partial H_n}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial u_k} + \ldots + \frac{\partial H_n}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial u_k} + \frac{\partial H_n}{\partial u_k} &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

$$(k = 1, 2 \ldots n).$$

Setzen wir $D = \left| \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \right|$, und bezeichnen wir die entsprechenden Unterdeterminanten mit $D_{i,k}$, so erhalten wir, da D nicht null sein kann:

$$-D \frac{\partial p_i}{\partial u_k} = \frac{\partial H_1}{\partial u_k} D_{1,i} + \frac{\partial H_2}{\partial u_k} D_{2,i} + \cdots \frac{\partial H_n}{\partial u_k} D_{n,i} \qquad (2)$$

Aus dem System (A) auf Seite 7 folgt:

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_k} = \frac{\Delta_{i,k}}{\Delta}$$

Dementsprechend wird: $D = \frac{1}{\Delta^n} \left| \Delta_{\mu,\nu} \right|$.

Nach einem bekannten Determinantensatz ist $\left| \Delta_{\mu,\nu} \right| = \Delta^{n-1}$

Also ist $D = \frac{\Delta^{n-1}}{\Delta^n} = \frac{1}{\Delta}$. Es wird ferner $D_{i,k} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i}$.

Setzen wir diese erhaltenen Werte ein in (2), so ergiebt sich, wenn wir noch beide Seiten der Gleichung mit Δ multiplicieren:

$$-\frac{\partial p_i}{\partial u_k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial u_k} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} \qquad (i,k = 1, 2 \,.\,.\, n) \qquad (3)$$

Jetzt machen wir die Annahme, dass die Integration nur durch Trennung der Variabeln möglich sei. Alsdann ist:

$$\frac{\partial p_i}{\partial u_k} = 0 \text{ für } i \lesseqgtr k.$$

Das System (3) geht dann über in:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial u_k} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} \\ -\frac{d p_k}{d u_k} &= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_s}{\partial u_k} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_s} \end{aligned} \qquad (i,k = 1, 2 \,.\,.\, n) \qquad (4)$$

Unter der Voraussetzung der Variabelntrennung geht das System (1) über in:

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial u_k} + \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = 0 \qquad (i,k = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

Also ist:
$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = -\frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial u_k}$$

Setzen wir dies in (4) ein, und fassen wir die Gleichungen für $(i = 1, 2 \,.\,.\, n)$ zusammen, so erhalten wir nach Division durch $-\frac{d p_k}{d u_k}$ das System:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial H_1}{\partial p_k} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H_2}{\partial p_k} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2} + \,.\,.\, + \frac{\partial H_n}{\partial p_k} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= \frac{\partial H_1}{\partial p_k} \frac{\partial p_{k-1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H_2}{\partial p_k} \frac{\partial p_{k-1}}{\partial \alpha_2} + \,.\,.\, + \frac{\partial H_n}{\partial p_k} \frac{\partial p_{k-1}}{\partial \alpha_n} \\
1 &= \frac{\partial H_1}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H_2}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_2} + \,.\,.\, + \frac{\partial H_n}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_n} \\
0 &= \frac{\partial H_1}{\partial p_k} \frac{\partial p_{k+1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H_2}{\partial p_k} \frac{\partial p_{k+1}}{\partial \alpha_2} + \,.\,.\, + \frac{\partial H_n}{\partial p_k} \frac{\partial p_{k+1}}{\partial \alpha_n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= \frac{\partial H_1}{\partial p_k} \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H_2}{\partial p_k} \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_n} + \,.\,.\, + \frac{\partial H_n}{\partial p_k} \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_n}
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich ohne weiteres:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_k} = \frac{\Delta_{1,k}}{\Delta} \qquad (k = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

Dies sind genau dieselben Gleichungen des Systems (2) auf Seite 7. Wir können dies Ergebnis in folgendem Satz aussprechen:

Wenn die Integration bei einer Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung durch Trennung der Variabeln möglich sein soll, müssen die Coefficienten die gleichen Bedingungsgleichungen erfüllen, welche zur Integration der Differentialgleichung ohne die Einschränkung notwendig sind. Umgekehrt lässt sich nicht schliessen, dass, wenn die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung erfüllt sind, eine Integration durch Variabelntrennung möglich ist.

Eine Integration durch Trennung der Variabeln ist dann und nur dann möglich, wenn die Functionen p_i $(i = 1, 2 \,.\,.\, n)$, vermittelst deren die Coefficienten $A_{s,t}$ $(s,t = 1 \,.\,.\, n)$ ausgedrückt werden, von der Form sind:

$$p_i = \omega_i\,(u_i, \alpha_1, \alpha_2 \,.\,.\, \alpha_n) \qquad (i = 1, 2 \,.\,.\, n).$$